

交换交叉立方网络在 PMC 模型下的 (t, k) -诊断度研究

郭晨^{1,2}, 肖志芳¹, 冷明¹, 彭硕¹, 王博¹

(1. 井冈山大学电子与信息工程学院, 江西 吉安 343009;
2. 江西省农作物生长物联网技术工程实验室, 江西 吉安 343009)

摘 要: 交换交叉立方网络是新型互连网络拓扑结构研究的最新成果之一, 它同时继承了交换超立方网络和交叉立方网络在网络直径、连接边、成本等方面优点, 表现出更高的性价比, 有望成为多处理器并行计算机的一种更加优化的组织形式。然而, 目前, 交换交叉立方网络尚未正式引入多处理器并行计算机。影响交换交叉立方网络应用和推广的主要原因之一是其可靠性研究尚不系统, 其中以诊断度为代表的运行可靠性的研究最为迫切。基于此, 以交换交叉立方网络为研究对象, 在得到交换交叉立方网络相关拓扑性质的基础上, 通过理论推导和仿真实验证明的方式, 首次得出了交换交叉立方网络 $ECQ(s, t)$ 在 PMC 模型下的 (t, k) -诊断度, 进一步补充完善了交换交叉立方网络的可靠性指标, 为后续的应用和推广提供了有力的技术支撑。

关键词: 交换交叉立方网络; PMC 模型; (t, k) -可诊断; (t, k) -诊断度

中图分类号: TP301

文献标识码: A

doi: 10.11959/j.issn.1000-436x.2019099

(t, k) -diagnosability of exchanged crossed cube under the PMC model

GUO Chen^{1,2}, XIAO Zhifang¹, LEMG Ming¹, PENG Shuo¹, WANG Bo¹

1. School of Electronic and Information Engineering, Jinggangshan University, Ji'an 343009, China
2. Jiangxi Engineering Laboratory of IoT Technologies for Crop Growth, Ji'an 343009, China

Abstract: Exchanged crossed cube(ECQ) is one of the latest achievements in the research of topology of novel interconnection networks. ECQ is a more optimized form of organization for multi-processor parallel computers, which retains the advantages of exchanged hypercube and crossed cube in terms of the smaller diameter, fewer links, and lower cost factor, and which indicates more balanced consideration. However, so far, ECQ hadn't been formally introduced into multi-processor parallel computers. One of the main reasons was that its reliability research wasn't yet systematic. Among them, the operational reliability represented by diagnosability was the most urgent. ECQ was taken as studying object, after topological analyzing, some important topological properties of ECQ were introduced, which determines the (t, k) -diagnosability of $ECQ(s, t)$ under the PMC model by theoretical deduction and simulation experiments. Simulation results show that ECQ reliability complement and improvement, which provides strong technical support for subsequent application and popularization.

Key words: exchanged crossed cube, PMC model, (t, k) -diagnosable, (t, k) -diagnosability

收稿日期: 2018-04-23; 修回日期: 2019-01-06

通信作者: 冷明, 33443240@qq.com

基金项目: 国家自然科学基金资助项目 (No. 61862035, No.61562046, No.61864003); 江西省教育厅科技基金资助项目 (No.GJJ180556, No.GJJ180562)

Foundation Items: The National Natural Science Foundation of China (No.61862035, No.61562046, No.61864003), The Science and Technology Project of Jiangxi Provincial Education Department (No. GJJ180556, No.GJJ180562)

1 引言

随着电子工业的飞速发展, 计算机系统中处理器的规模越来越大, 尺寸越来越小。而在处理器规模不断扩大的同时, 计算机系统的故障风险也变得越来越高, 由此引发了一系列可靠性问题的研究, 其中又以故障的诊断问题最为迫切^[1]。传统的故障诊断是通过一个所谓的“中心处理器”来测试每一个处理器的运行状态, 从而给出故障评价, 这种诊断方式工作量巨大并且多数情况都需要断电甚至拆解系统, 既不精确也缺乏可行性。因此, 1967年, Preparata 等^[2]提出了一种基于图论的系统级故障诊断 (system level diagnosis) 理论。系统级故障诊断充分利用了每一个处理器的处理能力, 让处理器之间进行相互测试, 通过综合分析来识别故障。通常情况下系统级故障诊断可以带电进行。因此, 系统级故障诊断既经济又便捷, 是多处理器并行计算机故障诊断的主要发展方向之一。

系统级故障诊断的执行还依赖特定的诊断策略 (diagnostic strategy)。1967年, Preparata 等^[2]首次将图论方法运用于多处理器并行计算机系统的故障诊断, 创造性地提出了 t -可诊断策略。 t -可诊断表示当系统的故障处理器数不超过 t 时, 所有故障都可以被诊断出来。 t -可诊断又可以根据迭代次数的不同, 进一步分为一步 t -可诊断和顺序 t -可诊断这 2 种类型。其中, 一步 t -可诊断只需要一次迭代即可完成, 而顺序 t -可诊断则需要反复迭代, 直到所有故障都被确认为止, 每一次迭代都需要有新的故障被确认。顺序 t -可诊断是一种通过多步诊断来有效提高系统诊断能力的诊断方式, 与一步 t -可诊断相比, 顺序 t -可诊断在诊断能力相同的情况下, 可以较大程度地节省测试成本。

根据顺序 t -可诊断的定义可知, 在最坏情况下, 顺序 t -可诊断的每一次迭代只能确定一个故障节点, 因此整体的迭代过程可能需要很长的时间, 这大大降低了诊断的实时性。基于此, 2003年, Araki 等^[3]提出了新一代的顺序 t -可诊断理论—— (t, k) -可诊断。 (t, k) -可诊断要求系统在故障节点数不超过 t 时, 每次迭代至少可以确定 k 个故障节点。 (t, k) -可诊断最坏情况下的最大迭代次数仅为 $\left\lceil \frac{t}{k} \right\rceil$, 比顺序 t -可诊断的最大迭代次数 t 要小很多。因此, (t, k) -可诊断改善了顺序 t -可诊断的过度时延, 是顺序故

障诊断的发展方向。事实上很多故障诊断理论都存在故障随机分布和故障条件分布这 2 种情景^[4], (t, k) -可诊断也不例外。在故障随机分布的情况下, $k=t$ 时的 (t, k) -可诊断就是一步 t -可诊断, $k=1$ 时的 (t, k) -可诊断就是顺序 t -可诊断。而对于故障节点不是随机分布, 而是和条件 t -可诊断^[1]一样。要求所有的节点都至少有一个正确的邻节点的情况, 2011年, Chang 等^[4]把这种情况下的 (t, k) -可诊断定义为条件 (t, k) -可诊断。条件 (t, k) -可诊断充分融合了条件 t -可诊断和 (t, k) -可诊断的优点, 在有效利用测试资源的基础上提高了系统的诊断能力。因此, (t, k) -可诊断和条件 (t, k) -可诊断成为了当下的研究热点^[5-11]。其中, Chang 等^[5]通过研究得出 Preparata 等^[2]提出的 PMC 模型下超立方网络 (Q_n)、扭立方网络 (TQ_n)、交叉立方网络 (CQ_n) 和莫比乌斯立方网络 (MQ_n) 的 (t, k) 诊断度均为 $(\Omega(\frac{2^n - 1}{n} \lg n), n)$ 。Chen 等^[6]在此基础上进一步证得 MM 模型下 Q_n 、 TQ_n 、 CQ_n 和 MQ_n 的 (t, k) 诊断度为 $(\Omega(\frac{2^{n-1}(n-2) \lg n}{n^2}), n)$, 并进一步给出 PMC 模型下针对超立方网络等分支组合图 (component-composition graph) (t, k) 诊断度的通用求法^[9]。2016–2017年, 文献[10-11]则分别给出了 PMC 模型下交换超立方网络 ($EH(s, t)$) 和 MM 模型下扩展立方体网络 (AQ_n) 的 (t, k) 诊断度。 (t, k) -可诊断改善了顺序 t -可诊断的过度时延, 是顺序故障诊断的发展方向。

互连网络 (interconnection network) 是一个专门服务于处理器和内存模块的通信机制^[12]。迄今为止, 互连网络已发展成一个以超立方网络及其变种为代表的具有多重继承关系的拓扑结构集族。交换交叉立方网络 (ECQ, exchanged crossed cube)^[13] 是新型互连网络的最新研究成果, 它同时集成了交换立方网络^[14] 和交叉立方网络^[15] 的优点, 是多处理器并行计算机系统的一种更加优化的组织形式。然而迄今为止, 交换交叉立方网络中以各种诊断度为代表的可靠性研究, 如诊断度、 g -正确邻节点条件诊断度^[16]、 (t, k) -诊断度等均未有结果, 这就严重制约了交换交叉立方网络的应用和推广。

基于此, 本文以交换交叉立方网络为研究对象, 首先对其拓扑性质展开研究, 在得到交换交叉立方网络相关拓扑性质的基础上, 对交换交叉立方网络在 PMC 模型下的 (t, k) -诊断度进行研究, 通过

理论推导得到了交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 在 PMC 模型下满足 $(s+1,s+1)$ - 可诊断和 $(2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}},s+1)$ - 可诊断, 其中 $2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}} > s+1$, $0 \leq \delta < 1$, $1 \leq s \leq t$ 。进而通过仿真验证了结论的正确性。本文的研究进一步分析了交换交叉立方网络的可靠性能, 为交换交叉立方网络的应用和推广扫清了障碍, 具有较强的理论价值和现实意义。

2 预备知识

2.1 PMC 模型

迄今为止, 系统级故障诊断已经提出了多种故障诊断模型, 但是使用最为广泛的还是 1967 年 Preparata 等^[2]提出的 PMC 模型。在 PMC 模型中, 系统用有向图 $G(V,E)$ 表示, 其中, V 表示处理器节点集合, E 表示测试边集合。 $G(V,E)$ 中任意的节点 u 表示为 $u \in V$, 如果存在着节点 u 测试节点 v , 则表示为 $(u,v) \in E$ 。测试的结果用 $\sigma(u,v)$ 表示, 当节点 u 对节点 v 的测试评价是正确时, 表示为 $\sigma(u,v)=0$; 否则表示为 $\sigma(u,v)=1$ 。系统所有的测试结果统称为系统的一个症候, 用 σ 表示。PMC 模型认为当测试节点无故障时测试结果真实可信, 而当测试节点本身是故障节点时测试结果不可信。PMC 模型下的测试规则如表 1 所示, 其中, $u、v$ 表示任意 2 个节点; $u=0$ 表示 u 是正确节点, $u=1$ 表示 u 是故障节点; $\sigma(u,v)$ 表示节点 u 对节点 v 的测试结果。

表 1 PMC 模型的测试规则

u	v	$\sigma(u,v)$
0	0	0
0	1	1
1	0	0/1
1	1	0/1

2.2 交换交叉立方网络

交换交叉立方网络是 Li 等^[13]提出的一种新型互连网络拓扑结构, 它同时继承了交换超立方网络和交叉立方网络的拓扑性质, 表现出更高的性价比。

交换交叉立方网络的定义需要首先引入关联对的概念。

定义 1^[15] 设 2 个长度为 2 的二进制字符串 X 和 Y , 其中 $X=x_1x_0, Y=y_1y_0$ 。 $X \sim Y$ 表示 X 和 Y 是关联对, 当且仅当 $(X,Y) \in \{(00,00),(10,10),(01,11),(11,01)\}$ 时, $X \sim Y$ 。

定义 2^[13] 交换交叉立方网络表示为 $ECQ(s,t)$, 其中, $s \geq 1, t \geq 1$ 。通常用图 $G(V,E)$ 进行定义, 其中, 节点集合 $V = \{a_{s-1}a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1}b_{t-2} \cdots b_0 | a_i, b_j, c \in \{0,1\}, i \in [0,s], j \in [0,t]\}$ 。 V 中任意节点用一个 “ $s+t+1$ ” 位的二进制字符串表示, $u[i]$ 表示节点 u 在位置 i 的取值用, $u[i:j]$ 表示节点 u 从第 i 个位置到第 j 个位置的取值用, 其中 $i \leq j$ 。边集合 E 包括 3 种类型, 分别表示为 $E_1、E_2$ 和 E_3 , 其定义如下。

E_1 : $u[0] \neq v[0]$, 且 $u[(s+t):1] = v[(s+t):1]$ 时的边 $(u,v) \in E_1$ 。

E_2 : $u[0] = v[0] = 0$, 且 $u[t:1] = v[t:1]$, 存在着正整数 $l, (s+t) \geq l > t$, 有 $u[(s+t):l] = v[(s+t):l]$, 如果 $l-t$ 是偶数, 那么 $D = \{1a_{s-2} \cdots a_0b_{t-1} \cdots b_0 | a_i, b_j \in \{0,1\} \text{ for } j \in [0, s-2], i \in [0, t-1]\}$, $u[t+2i+2:t+2i+1] \sim v[t+2i+2:t+2i+1]$, 其中 E_2 , 那么边 $(u,v) \in E_2$;

E_3 : $u[0] = v[0] = 1$, 且 $u[(s+t):(\Delta t+1)] = v[(s+t):(t+1)]$, 存在着一个正整数 $l, t \geq l \geq 1$, 有 $u[t:l] = v[t:l]$, $u[l-1] \neq v[l-1]$ 。如果 $(l-1)$ 是偶数, 那么 $u[l-2] = v[l-2]$ 。 $u[(2i+2):(2i+1)] \sim v[(2i+2):(2i+1)]$, 其中 $\left\lfloor \frac{l-1}{2} \right\rfloor > i \geq 0$, 那么边 $(u,v) \in E_3$ 。

由 $ECQ(s,t)$ 的定义可知 $|V(EQ(s,t))| = 2^{s+t+1}$, $|E(ECQ(s,t))| = 2^{s+t-1}(s+t+2)$, 其中, 属于 E_1 的边 2^{s+t} 条, 属于 E_2 的边 $2^{s+t-1}t$ 条, 属于 E_3 的边 $2^{s+t-1}s$ 条。

$ECQ(1,1)$ 、 $ECQ(1,2)$ 和 $ECQ(2,2)$ 的拓扑结构如图 1~图 3 所示, 其中虚线、粗实线和细实线分别表示 $E_1、E_2$ 和 E_3 。

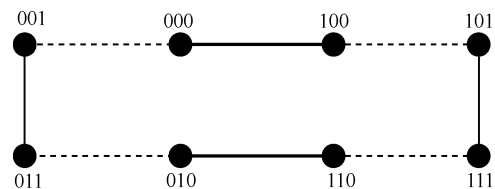


图 1 $ECQ(1,1)$ 拓扑结构

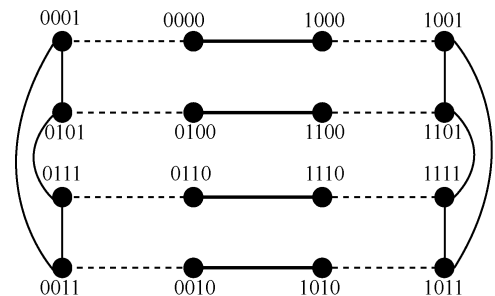


图 2 $ECQ(1,2)$ 拓扑结构

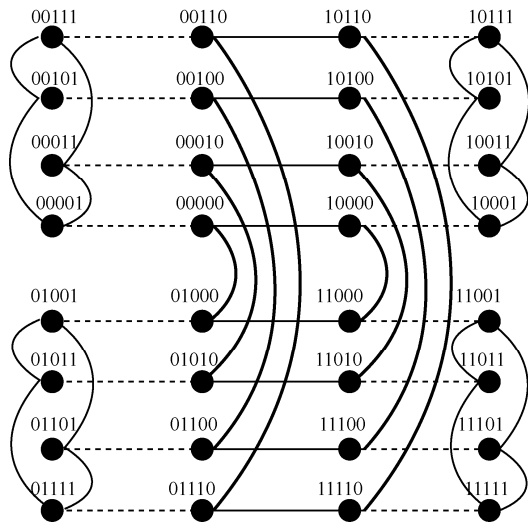


图 3 ECQ(2,2)拓扑结构

ECQ(s,t)具有以下性质。

引理 1^[13] ECQ(s,t)的所有节点中, c 位置取值为 0 的节点的度为 s+1, c 位置取值为 1 的节点的度为 t+1。

因此可知, 1 ≤ s ≤ t 时 ECQ(s,t)的最小度 δ(ECQ(s,t))=s+1。

引理 2^[13] ECQ(s, t)可以划分成 2 个 ECQ(s-1,t) 或者 2 个 ECQ(s,t-1)。

由引理 2 可以把 ECQ(s,t)划分为 2 个 ECQ(s-1,t), 分别表示为 L 和 R, 其中, L 的节点集 V(L)={0a_{s-2}⋯a₀b_{t-1}⋯b₀c}, R 的节点集 V(R)={1a_{s-2}⋯a₀b_{t-1}⋯b₀c}。进一步把 V(L)分为 A 和 B 这 2 个节点集合, 把 V(R)分为 C 和 D 这 2 个节点集合, A、B、C 和 D 的定义如下^[13]

$$A = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 0 \mid a_j, b_j \in \{0, 1\}\},$$

$$B = \{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 1 \mid a_j, b_j \in \{0, 1\}\},$$

$$C = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 0 \mid a_j, b_j \in \{0, 1\}\},$$

$$D = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 1 \mid a_j, b_j \in \{0, 1\}\},$$

其中, j ∈ [0, s-2], i ∈ [0, t-1]。

由 A、B、C 和 D 的定义可知, 2 个端点都属于 A 的边是 E₂ 边, 2 个端点都属于 B 的边是 E₃ 边, 2 个端点都属于 C 的边是 E₂ 边, 2 个端点都属于 D 的边是 E₃ 边, 2 个端点分别属于 A 和 B 的边是 E₁ 边, 2 个端点分别属于 A 和 C 的边是 E₂ 边, 2 个端点分别属于 C 和 D 的边是 E₁ 边。同时 AUB、AUC 和 CUD 都是完美匹配^[17], 如图 4 所示。

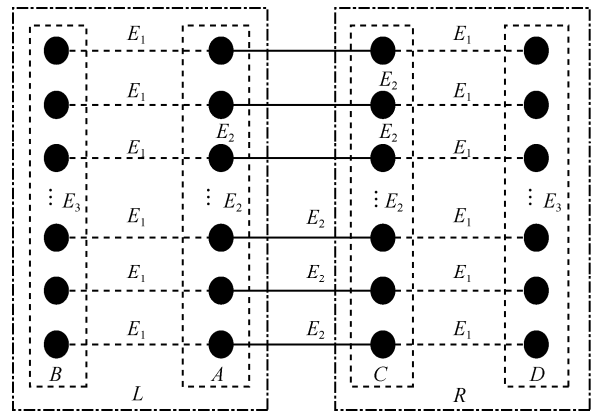


图 4 节点集合 A、B、C、D 示意

引理 3^[13] ECQ(s,t) 与 ECQ(t,s) 同构, 表示为 ECQ(s,t) ≅ ECQ(t,s)。

引理 4^[17] ECQ(s,t)的点连通度 k(ECQ(s,t))=s+1, 其中 1 ≤ s ≤ t。

引理 5^[18] ECQ(s,t)的拓扑结构不含节点三角 (triangle-free)。

由引理 5 可知, 对于 ECQ(s,t)中任意的 2 个节点 u 和 v, 如果 (u,v) ∈ E(ECQ(s,t)), 那么 |N(u) ∩ N(v)|=0, 其中, N(u) 和 N(v) 分别表示节点 u 和节点 v 的邻节点集合。

2.3 (t,k)-可诊断

(t,k)-可诊断是 2003 年 Araki 和 Shibata^[3]共同提出的新一代顺序 t-可诊断, (t,k)-可诊断要求在故障节点不超过 t 个的情况下, 迭代进行故障诊断, 每一次迭代至少可以识别出其中的 k 个故障节点, 其中 k ≤ t。具体定义如下。

定义 3^[3] 对于 2 个正整数 t 和 k, k ≤ t, 设 F 是系统的故障节点集合, 给定症候下当系统满足以下 2 个条件时系统是 (t,k)-可诊断系统。

- 1) 当 |F| ≤ k 时, 所有的故障节点都可以被诊断出来。
- 2) 当 k < |F| ≤ t 时, 至少有 k 个故障节点可以被诊断出来。

给定一个正整数 k ≥ 1, 系统满足 (t,k)-可诊断时, t 可取到的最大正整数称为系统的 (t,k)-诊断度。当系统是 (t,k)-可诊断系统时必然也是 (t,k')-可诊断系统, 其中 1 ≤ k' < k。(t,k)-可诊断可通过引理 6 进行判定。

引理 6^[3] 系统是 (t,k)-可诊断系统, 当且仅当对于任意故障节点数不超过 t 的症候 σ, |∩_{F ∈ Ω_{σ,t}} F| ≥ k 或者 |Ω_{σ,t}|=1。其中, Ω_{σ,t}={F|F 是与

症候 σ 一致的故障节点集合, 并且 $|F| \leq t$ 。

根据定义 3 可知, 当 $k=t$ 时, (t,k) -可诊断就是一步 t -可诊断, 因此, $k=t$ 时的 (t,k) -诊断度可以按照一步 t -可诊断的诊断度来求取, 如引理 7 所示。

引理 7^[19] 设系统 S 有 n 个节点, 如果 S 的点连通度 $k(S) \geq t$ 并且 $n \geq (2t+1)$, 那么系统 S 是一步 t -可诊断系统。

为了区分 (t,k) -可诊断和交换交叉立方网络 $ECQ(s,t)$ 中的 t , 下文将把 (t,k) -可诊断改写成 (t_1,k) -可诊断, 其定义和性质定理维持不变。

2.4 集团

集团是 1998 年张大方等^[20]提出了一种特殊的连通分支, 集团内的节点具有状态相同的特点。具体定义如下。

定义 4^[20] 系统 $G(V,E)$ 中满足以下 2 个条件的连通分支 H , 则称为集团。

1) H 中任意相邻的 2 个节点之间的测试结果都为“0”。

2) H 中任意的节点如果与 H 以外的节点相连接, 那么它们之间的互测结果不能同时为“0”。

在给定症候的情况下, 可以通过断开所有测试结果为“1”的互测边, 求取强连通分支的方式来得出所有的集团。以 $ECQ(1,2)$ 为例, 它的症候如图 5 所示, 那么断开所有测试结果为“1”的互测边之后如图 6 所示。因此, 该系统的集团有 6 个, 分别是 $\{0001, 0000, 0101\}$ 、 $\{0100, 1100\}$ 、 $\{0111\}$ 、 $\{1000, 1001, 1101\}$ 、 $\{0110, 1110, 1111\}$ 和 $\{0011, 0010, 1010, 1011\}$ 。

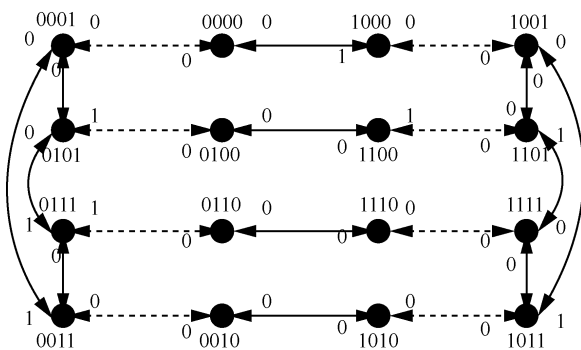


图 5 $ECQ(1,2)$ 的给定症候示意

集团具有以下性质, 如引理 8~引理 10 所示。

引理 8^[20] 集团中所有节点要么全都是故障节点, 要么全都是正确节点。

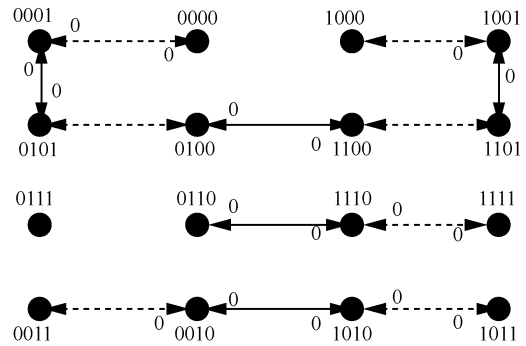


图 6 图 5 中包含的集团示意

通常情况下把全部是正确节点的集团称为正确集团, 把全部是故障节点的集团称为故障集团。

引理 9^[21] 如果系统的故障节点数不超过 t , 那么系统中节点数大于 t 的集团必定是正确集团。

引理 10^[21] 正确集团只能和故障集团相邻。

$G(V,E)$ 在给定症候下的所有集团归为集合 V^+ , 不同集团之间的邻接集合 E^+ , 表示为 $E^+ = \{(X, Y) | X \in V^+, Y \in V^+, (x, y) \in E, x \in X, y \in Y\}$ 。由此可以把 $G(V,E)$ 表示为 $G^+(V^+, E^+)$ 。集团集合 V^+ 的独立子集 V'^+ , 指的是 $V'^+ \subset V^+$ 并且 V'^+ 中的任意集团之间都不相邻。

接下来, 借助集团的定义, 设计出 $G^+(V^+, E^+)$ 的 3 个重要函数: $\phi(x_1)$ 、 $\phi(x_1, x_2)$ 和 $I(m)$ 。

定义 5^[5] $\phi(x_1)$ 表示 m 可取到的最小正整数。指的是在 $G^+(V^+, E^+)$ 中, V^+ 存在着一个满足 $|V'^+| = \sum_{Z \in V'^+} |Z| = m$ 的子集 V'^+ , $V^+ - V'^+$ 是 V^+ 的独立子集, 使得 $V^+ - V'^+$ 中不存在满足 $|X_i| \geq x_1$ 的集团 X_i 。

定义 6^[5] $\phi(x_1, x_2)$ 表示 p 可取到的最大正整数。指的是在 $G^+(V^+, E^+)$ 中, 对于 V^+ 中满足 $|V'^+| \leq p$ 的每一个子集 V'^+ , $V^+ - V'^+$ 是 V^+ 的独立子集, 则至少存在着一个属于 $V^+ - V'^+$ 的集团 X_i , X_i 满足以下 2 个条件。

1) $|X_i| \geq x_1$ 。

2) $\sum_{Y \in N(X_i)} |Y| \geq x_2$, 其中 $N(X_i) = \{Y | Y \in V^+, (X_i, Y) \in E^+\}$ 。

由 $\phi(x_1, x_2)$ 和 $\phi(x_1)$ 的定义可知, $\phi(x_1, x_2) \leq \phi(x_1) - 1$ 。 $x_2 = 0$ 时, $\phi(x_1, 0) = \phi(x_1) - 1$ ^[5]。

定义 7^[5] 函数 $I(m)$ 表示节点数为 m 的所有节点子集中, 2 个端点都属于该子集的边的最大数目。由 $I(m)$ 的定义可知, $I(1) = 0$ 。

3 交换交叉立方网络的拓扑性质

接下来, 对交换交叉立方网络拓扑结构的邻节点性质展开研究。

定理 1 设节点 u 和节点 v 是 $ECQ(s, t)$ 中任意的 2 个节点, 则 $N(u) \cap N(v) \leq 2$ 。

证明 用数学归纳法证明。由图 1~图 3 可知, $ECQ(1, 1)$ 、 $ECQ(1, 2)$ 和 $ECQ(2, 2)$ 都满足 $N(u) \cap N(v) \leq 2$ 。假设 $ECQ(s-1, t)$ (或者 $ECQ(s, t-1)$) 也满足 $N(u) \cap N(v) \leq 2$ 。接下来证明 $ECQ(s, t)$ 是否满足 $N(u) \cap N(v) \leq 2$ 。根据引理 2 把 $ECQ(s, t)$ 划分为 2 个 $ECQ(s-1, t)$ (或者 $ECQ(s, t-1)$), 分别表示为 L 和 R 。不失一般性, 设 $L \cong ECQ(s-1, t)$ 、 $R \cong ECQ(s-1, t)$ 。当 $u, v \in V(L)$ (或者 $u, v \in V(R)$) 时, $N(u) \cap N(v) \subset V(L)$ (或者 $N(u) \cap N(v) \subset V(R)$)。根据数学归纳法的假设可知 $N(u) \cap N(v) \leq 2$ 。而当 $u \in V(L)$ 并且 $v \in V(R)$ (或者 $u \in V(R)$ 并且 $v \in V(L)$) 时, 如图 4 所示, 由于 A 和 C 之间是完美匹配, 所以 $|N(u) \cap N(v)| \leq 2$ 。因此, 定理 1 可证, 证毕。

定理 2 设节点 u 和节点 v 是 $ECQ(s, t)$ 中任意的 2 个节点, 且 $(u, v) \in E(ECQ(s, t))$, 那么 $|N(u) \cup N(v)| \in \{2t+2, 2s+2, s+t+2\}$ 。

证明 由引理 1 可知, $ECQ(s, t)$ 的所有节点中, c 位置取值为 0 的节点的度为 $(s+1)$, c 位置取值为 1 的节点的度为 $(t+1)$ 。所以由引理 5 可知, 当 u 和 v 在 c 位置的取值都为 0 时, $|N(u) \cup N(v)| = 2s+2$; 当 u 和 v 在 c 位置的取值都为 1 时, $|N(u) \cup N(v)| = 2t+2$; 当 u 和 v 有一个在 c 位置的取值为 0, 另一个在 c 位置的取值为 1 时, $|N(u) \cup N(v)| = s+t+2$ 。因此 $|N(u) \cup N(v)| \in \{2t+2, 2s+2, s+t+2\}$, 证毕。

在得到 $ECQ(s, t)$ 相关拓朴性质的基础上, 对 $ECQ(s, t)$ 在 PMC 模型下的 (t_1, k) -诊断度展开研究。

4 交换交叉立方网络在 PMC 模型下的 (t_1, k) -可诊断

首先进行函数 $\varphi(x_1)$ 、 $\phi(x_1, x_2)$ 和 $I(m)$ 的取值研究。

定理 3 在 $ECQ(s, t)$ 中, $I(m) \leq mlbm$ 。

证明 根据引理 2 可把 $ECQ(s, t)$ 划分为 2 个 $ECQ(s-1, t)$, 分别表示为 L 和 R , 其中, $V(L) =$

$\{0a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$, $V(R) = \{1a_{s-2} \cdots a_0 b_{t-1} \cdots b_0 c\}$ 。如图 4 可知, 节点集合 A 中的每一个节点都与节点集合 C 中的一个节点相邻接。对于 $ECQ(s, t)$ 的任意节点子集 X 和 Y , 设 $Y^L = Y \cap V(L)$, $Y^R = Y \cap V(R)$ 。由于 Y^L 中的任意节点至多只有一个属于 Y^R 的邻节点, 反之也一样, 因此存在着如式(1)所示的不等式。

Y 内部的边数 $\leq Y^L$ 内部的边数 +

$$Y^R \text{ 内部的边数} + \min\{|Y^L|, |Y^R|\} \quad (1)$$

设 $I_L(m)$ (或者 $I_R(m)$) 表示属于 L (或者 R) 且节点数为 m 的节点子集包含内部边的最大数目, 同样有 $I_L(1) = 0$ 、 $I_R(1) = 0$ 。由不等式(1)可知, $I(|Y|) \leq \max_{Y \in V, |Y|=|X|} \{I_L(|Y^L|) + I_R(|Y^R|)\} + \min\{|Y^L|, |Y^R|\}$ 。不失一般性地, 设 $|Y^L| \geq |Y^R|$, 设 $|Y| = m$, 则

$$\min\{|Y^L|, |Y^R|\} = |Y^R| = \beta, \quad 0 \leq \beta \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor$$

$$I(m) \leq \max_{0 \leq \beta \leq \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor} \{I_L(m-\beta) + I_R(\beta) + \beta\}$$

接下来, 用数学归纳进行证明。由图 1~图 3 可知, $ECQ(1, 1)$ 、 $ECQ(1, 2)$ 和 $ECQ(2, 2)$ 都满足 $I(m) \leq mlbm$ 。假设 $ECQ(p, q)$ 也有 $I(m) \leq mlbm$, 其中 $1 < p < s$ 、 $1 < q \leq t$ 。那么接下来证明 $ECQ(s, t)$ 是否满足 $I(m) \leq mlbm$ 。

当 $\beta = 0$ 时, $I(m) = I_L(m) + I_R(0) = I_L(m)$, 由归纳法的假设可知 $I_L(m) \leq mlbm$, 因此 $I(m) \leq mlbm$ 。当 $\beta \geq 1$ 时, $I(m) \leq \max_{1 \leq \beta \leq \left\lfloor \frac{2}{m} \right\rfloor} \{I_L(m-\beta) + I_R(\beta) + \beta\}$, 同样由归纳法的假设可知 $I(m) \leq \max_{1 \leq \beta \leq \left\lfloor \frac{2}{m} \right\rfloor} \{(m-\beta)lb(m-\beta) + \beta lb\beta + \beta\}$ 。设函数 $f(\beta) = (m-\beta)lb(m-\beta) + \beta lb\beta + \beta$, 可知 $f'(\beta) = -lb(m-\beta) + lb\beta + 1$, $f''(\beta) = \frac{1}{(m-\beta)\ln 2} + \frac{1}{\beta \ln 2} > 0$ 。

由于 $f''(\beta) > 0$, 可知 $\beta = 1$ 或者 $\beta = \left\lfloor \frac{2}{m} \right\rfloor$ 时 $f(\beta)$ 可取到最大值。由于 $f(1) \leq mlbm$ 、 $f\left(\left\lfloor \frac{2}{m} \right\rfloor\right) \leq mlbm$, 所以 $I(m) \leq mlbm$, 定理 3 可证, 证毕。

接下来, 对 $ECQ(s, t)$ 在 PMC 模型下满足 (t_1, k) -可诊断时 k 和 t_1 的取值进行研究。

4.1 k 的取值研究

给定症候下的 $ECQ(s, t)$ 用 $G^+(V^+, E^+)$ 表示, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。设集团 $X \in V^+$, V_X 表示 X 的节点集

合, $V_{N(X)}$ 表示 X 的邻节点集合。由 ECQ(s,t) 和集团的定义可知 $|X| > 0$ 、 $|V_{N(X)}| > 0$, 并且 X 具有以下性质。

定理 4 把 $G(V,E)$ 表示为 $G^+(V^+,E^+)$, 设集团 $X \in V^+$, 则 $|V_{N(X)}| \geq k(G)$ 或者 $V = V_X + V_{N(X)}$ 。

证明 由 X 和 $V_{N(X)}$ 的定义可知, X 和 $V - V_{N(X)}$ 之间不存在边连接, 如果 $V - V_X - V_{N(X)} \neq \emptyset$ 则 $V_{N(X)}$ 是 $G(V,E)$ 的一个点割集, 因此 $|V_{N(X)}| \geq k(G)$ 。而当 $V - V_X - V_{N(X)} = \emptyset$ 时, 可以直接推导出 $V = V_X + V_{N(X)}$, 证毕。

另外可知, 从 $V_{N(X)}$ 发出的到 $V_{N(X)}$ 以外的边数 + $V_{N(X)}$ 内部的边数 $\geq V_{N(X)}$ 到 V_X 的边数 + $V_{N(X)}$ 到 $V - V_X - V_{N(X)}$ 的边数, 如图 7 所示。由引理 1 可知, ECQ(s,t) 中每一个节点的度 $\in \{s+1, t+1\}$ 。由于 $1 \leq s \leq t$, 所以从 $V_{N(X)}$ 发出的到 $V_{N(X)}$ 以外的边数 + $V_{N(X)}$ 内部的边数 $\leq |V_{N(X)}|(t+1)$ 。 $V_{N(X)}$ 到 V_X 的边数 = V_X 到 $V_{N(X)}$ 的边数 = V_X 发出的到 V_X 以外的所有边数 - V_X 内部的边数, 因此 $V_{N(X)}$ 到 V_X 的边数 $\geq |V_X|(s+1) - I(|V_X|)$ 。同理, 由于 $V - V_X - V_{N(X)}$ 与 V_X 之间不存在着边连接, 所以 $V_{N(X)}$ 到 $V - V_X - V_{N(X)}$ 的边数 $\geq (|V - V_X - V_{N(X)}|)(s+1) - I(|V - V_X - V_{N(X)}|)$ 。因此 $|V_{N(X)}|(t+1) \geq |V_X|(s+1) - I(|V_X|) + (|V - V_X - V_{N(X)}|)(s+1) - I(|V - V_X - V_{N(X)}|)$ 。由定理 3 可知 $I(|V_X|) \leq |V_X| \text{lb}|V_X|$ 、 $I(|V - V_X - V_{N(X)}|) \leq |V - V_X - V_{N(X)}| \text{lb}|V - V_X - V_{N(X)}|$, 所以可得

$$|V_{N(X)}|(t+1) \geq |V_X|(s+1) - |V_X| \text{lb}|V_X| + (|V - V_X - V_{N(X)}|)(s+1) - |V - V_X - V_{N(X)}| \text{lb}|V - V_X - V_{N(X)}| \quad (2)$$

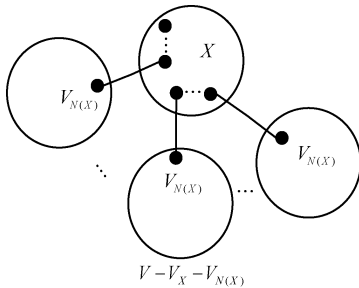


图 7 $G^+(V^+,E^+)$ 中集团 X 和 $V_{N(X)}$ 示意

由不等式(2)可进一步推导出定理 5。

定理 5 在给定症候下, ECQ(s,t) 用 $G^+(V^+,E^+)$ 表示, 其中, $1 \leq s \leq t$ 。那么对于 V^+ 中的任意集团 X , 都有 $|V_{N(X)}| \geq s+1$ 。

证明 由于 $|V - V_X - V_{N(X)}| = |V| - |V_X| - |V_{N(X)}|$, 以下分 2 种情况进行证明。

情况 1 $|V_X| \geq 2(s+1)$ 并且 $|V - V_X - V_{N(X)}| \geq 2(s+1)$, 由于 $|V - V_X - V_{N(X)}| = |V| - |V_X| - |V_{N(X)}|$, 所以可推导出 $2(s+1) \leq |V_X| \leq |V| - |V_{N(X)}| - 2(s+1) < |V| - 2(s+1)$ 。因此, 可知 $4(s+1) < |V|$ 。设 $p = |V_{N(X)}|$, $q = |V_X|$, 所以 $2(s+1) \leq q \leq |V| - p - 2(s+1) < |V| - 2(s+1)$ 。可以把不等式(2)转换为

$$p(t+1) \geq q(s+1) - q \text{lb}q + (|V - q - p|)(s+1) - (|V| - q - p) \text{lb}(|V| - q - p) \Rightarrow 0 \geq (|V| - p)(s+1) - p(t+1) - q \text{lb}q - (|V| - p - q) \text{lb}(|V| - p - q)$$

设函数 $h(p,q) = (|V| - p)(s+1) - p(t+1) - q \text{lb}q - (|V| - p - q) \text{lb}(|V| - p - q) \Rightarrow 0 \geq h(p,q)$

对函数 $h(p,q)$ 求偏导, 可得

$$\frac{\partial h}{\partial p} = -(s+1) - (t+1) + \text{lb}(|V| - p - q) + \frac{1}{\ln 2} < 0$$

$$\frac{\partial h}{\partial q} = -\text{lb}q - q \frac{1}{q \ln 2} + \text{lb}(|V| - p - q) + \frac{1}{\ln 2}$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial q^2} = -\frac{1}{q \ln 2} - \frac{1}{(|V| - p - q) \ln 2} < 0$$

所以 $h(p,q)$ 是关于变量 p 单调递减, 并且由 $h(p,q)$ 的一阶偏导和二阶偏导可知, $h(p,q)$ 在 p 取最大值并且 q 取最大值(或者取最小值)时可以取到最小值。

假设 $p \leq s+1$, 那么当 $p = s+1$ 并且 $q = 2(s+1)$ (或者 $q = |V| - 2(s+1)$) 时 $h(p,q)$ 可取到最小值。因此, $h(s+1, 2(s+1)) \leq h(p,q)$, $h(s+1, |V| - 2(s+1)) \leq h(p,q)$ 。由于 $h(s+1, 2(s+1)) > 0$ 、 $h(s+1, |V| - 2(s+1)) \geq 0$, 所以要求 $h(p,q) > 0$, 这与 $h(p,q) \leq 0$ 相矛盾。因此 $p = |V_{N(X)}| > s+1$ 。

情况 2 $|V_X| < 2(s+1)$ 或者 $|V - V_X - V_{N(X)}| < 2(s+1)$

情况 2.1 $|V_X| < 2(s+1)$

以下根据 $V = V_X + V_{N(X)}$ 是否成立分 2 种子情况进行说明。

情况 2.1.1 $V = V_X + V_{N(X)}$

由 $V = V_X + V_{N(X)}$ 可知 $V_X = V(\text{ECQ}(s,t)) - V_{N(X)}$

$\Rightarrow |V_X| = 2^{s+t+1} - 1 > 2(s+1)$, 这与情况 2.1 的条件 $|V_X| < 2(s+1)$ 相矛盾。因此, 当前条件下不存在 $V = V_X + V_{N(X)}$ 的情况。

情况 2.1.2 $V \neq V_X + V_{N(X)}$

由 $V \neq V_X + V_{N(X)}$, 可知 $V - V_X - V_{N(X)} \neq \emptyset$ 。由定理 4 可知, $|V_{N(X)}| \geq k(G)$ 。又由引理 4 可知 $k(\text{ECQ}(s, t)) = s + 1$, 所以 $|V_{N(X)}| \geq s + 1$ 。

情况 2.2 $|V - V_X - V_{N(X)}| < 2(s+1)$

按情况 2.1 的方法同理可证 $|V_{N(X)}| \geq s + 1$ 。

证毕。

由引理 10 和定理 5 可知, 对于给定症候下的 $\text{ECQ}(s, t)$, 如果可以确定集团 X 是正确集团, 那么可知 $V_{N(X)}$ 都是故障节点, 且 $|V_{N(X)}| \geq s + 1$ 。因此, 在能确定任意一个正确集团的前提下, $\text{ECQ}(s, t)$ 在 PMC 模型下满足 (t_1, k) -可诊断时 $k \geq s + 1$ 。

4.2 t_1 的取值研究

首先研究 $\text{ECQ}(s, t)$ 中函数 $\phi(t_1 + 1)$ 的取值, 在此基础上研究满足 $\phi(t_1 + 1, 0) \geq t_1$ 时 t_1 可取到的最大值, 进而可以确定 $\text{ECQ}(s, t)$ 在 PMC 模型下满足 (t_1, k) -可诊断时 t_1 的取值。

定理 6 对于 $\text{ECQ}(s, t)$, 函数 $\phi(t_1 + 1) \geq \frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4\text{lb}t_1)}{\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1}$, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。

证明 根据 $\phi(x_1)$ 的定义可知 $\phi(t_1 + 1) \geq \frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4\text{lb}t_1)}{\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1}$, 表示存在着一个满足

$|V^{+'}| \geq \frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4\text{lb}t_1)}{\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1}$ 的集团子集 $V^{+'}$, 使

$V^+ - V^{+'}$ 是 V^+ 的独立子集, 并且 $V^+ - V^{+'}$ 中的任意集团 Y_j 都满足 $|Y_j| \leq t_1$ 。设 $V^{+'} = \{X_1, X_2, \dots, X_a\}$, $V^+ - V^{+'} = \{Y_1, Y_2, \dots, Y_b\}$, 其中 X_1, X_2, \dots, X_a 及 Y_1, Y_2, \dots, Y_b 表示 V^+ 中所有的集团, $\sum_{j=1}^b |Y_j| = |V(\text{ECQ}(s, t))| - \sum_{i=1}^a |X_i|$ 。

由于 $V^+ - V^{+'}$ 是 V^+ 的独立子集, 所以集团 Y_1, Y_2, \dots, Y_b 两两不相邻且 $I(|V^+ - V^{+'}|) = \sum_{j=1}^b I(|Y_j|)$ 。

由引理 1 可知, $\text{ECQ}(s, t)$ 中 c 位置取值为 0 的节点的度为 $s + 1$, c 位置取值为 1 的节点的度为 $t + 1$, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。因此, $I(|X_i|) \leq |X_i| \frac{t+1}{2}$, 其中 $1 \leq i \leq a$, 且 $V^{+'}$ 与 $V^+ - V^{+'}$ 之间的边数不超过 $\sum_{i=1}^a |X_i|(t+1)$ (当从 $V^{+'}$ 发出的所有边的另一个顶点都属于 $V^+ - V^{+'}$ 时可取到最大值)。

由于 $|E(\text{ECQ}(s, t))| \leq I(|V^+ - V^{+'}|) + I(|V^{+'}|) + (V^{+'}$ 与 $V^+ - V^{+'}$ 之间的边数) = $\sum_{j=1}^b I(|Y_j|) + \sum_{i=1}^a |X_i| + (V^{+'}$ 与 $V^+ - V^{+'}$ 之间的边数) $\leq \sum_{j=1}^b |Y_j| \text{lb}|Y_j| + \sum_{i=1}^a |X_i| \frac{t+1}{2} + \sum_{i=1}^a |X_i|(t+1)$ (3)

由于 $|E(\text{ECQ}(s, t))| = (s+t+2)2^{s+t-1}$ 、 $|V(\text{ECQ}(s, t))| = 2^{s+t+1}$, 且 $|Y_j| \leq t_1$, $\sum_{j=1}^b |Y_j| = |V(\text{ECQ}(s, t))| - \sum_{i=1}^a |X_i|$, 所以由式(3)可知

$$\begin{aligned} (s+t+2)2^{s+t-1} &\leq (2^{s+t+1} - \sum_{i=1}^a |X_i|) \\ \text{lb}t_1 + \frac{3}{2} \sum_{i=1}^a |X_i|(t+1) &\Rightarrow (s+t+2)2^{s+t-1} - \\ 2^{s+t+1} \text{lb}t_1 &\leq (\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1) \sum_{i=1}^a |X_i| \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^a |X_i| &\geq \frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4\text{lb}t_1)}{\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1} \end{aligned}$$

因此, $\phi(t_1 + 1) = \sum_{i=1}^a |X_i| \geq \frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4\text{lb}t_1)}{\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1}$,

定理 6 可证, 证毕。

基于 $\phi(t_1 + 1)$ 和 $\phi(t_1 + 1, 0)$ 的关联关系, 可通过定理 6 对 $\phi(t_1 + 1, 0) \geq t_1$ 时 t_1 的取值进行研究, 得出定理 7。

定理 7 对于 $\text{ECQ}(s, t)$, $t_1 \leq 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}}$ 时函数 $\phi(t_1 + 1, 0) \geq t_1$, 其中 $0 \leq \delta < 1$ 。

证明 由于 $\phi(x_1, 0) = \phi(x_1) - 1$, 所以 $\phi(t_1 + 1, 0) = \phi(t_1 + 1) - 1 \geq \frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4\text{lb}t_1)}{\frac{3}{2}t + \frac{3}{2} - \text{lb}t_1} - 1$ 。

接下来, 需要证明 $\frac{2^{s+t-1}(s+t+2-4lbt_1)}{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}-lbt_1}-1 \geq t_1$ 是

否成立。设 $h(t_1) = 2^{s+t-1}(s+t+2-4lbt_1) - (t_1+1)(\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}-lbt_1)$, 可以求得 $h'(t_1) = -4 \times 2^{s+t-1} \frac{1}{t_1 \ln 2} - (\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}-lbt_1) + \frac{t_1+1}{t_1 \ln 2} = (1-2^{s+t+1}) \frac{1}{t_1 \ln 2} - (\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}) + lbt_1 + \frac{1}{\ln 2}$ 。可知当 $t_1 \leq 2^{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}}$ 时 $h'(t_1) < 0$, $t_1 \leq 2^{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}}$

时 $h(t_1)$ 单调递减。且当 $t_1 = 2^{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}}$ 时 $h(t_1) < 0$, $h(t_1)$ 的基本走势如图 8 所示。由于 $t_1 \leq 2^{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}}$ 时存在着 $h(t_1) < 0$, 因此根据 $\phi(x_1, x_2)$ 的定义可知, $t_1 \geq 2^{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}}$ 时不满足 $\phi(t_1+1, 0) \geq t_1$ 。而当 $t_1 \leq 2^{\frac{3}{2}t+\frac{3}{2}}$ 时为了使 $h(t_1) \geq 0$, 则要求 $t_1 < 2^{\frac{s+t+2}{4}}$ 。同时可知 $t_1 = 2^{\frac{s+t+3}{4}}$ 时 $h(t_1) < 0$ 。因此, $t_1 \leq 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}}$ 时 $\phi(t_1+1, 0) \geq t_1$, 其中 $0 \leq \delta < 1$ 。定理 7 可证, 证毕。

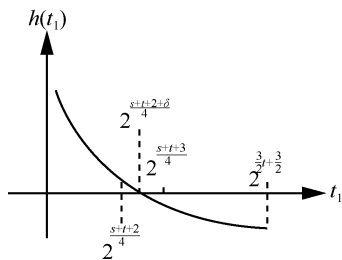


图 8 $h(t_1)$ 的走势

由定理 7 可知, $ECQ(s, t)$ 在 PMC 模型下满足 (t_1, k) -可诊断时, 如果 $t_1 \leq 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}}$, 其中 $0 \leq \delta < 1$, 那么至少存在着一个集团 X_i , $|X_i| \geq t_1+1$ 且 $|N(X_i)| \geq 0$ 。根据 (t_1, k) -可诊断的定义可知系统的故障节点数不超过 t_1 时集团 X_i 必然是正确集团, $V_{N(X_i)}$ 是故障节点。

4.3 交换交叉立方网络在 PMC 模型下的 (t_1, k) -诊断度

由于 $k=t_1$ 时 (t_1, k) -可诊断就是一步 t_1 -可诊断, $ECQ(s, t)$ 在 $k=t_1$ 时的 (t_1, k) -诊断度如定理 8 所示。

定理 8 $ECQ(s, t)$ 满足 $(s+1, s+1)$ -可诊断, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。

证明 由引理 4 可知, $1 \leq s \leq t$ 时 $k(ECQ(s, t))=s+1$ 。由于 $V(ECQ(s, t)) = 2^{s+t+1} \geq 2(s+1)+1$, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。由引理 7 可知, $ECQ(s, t)$ 是一步 $(s+1)$ -可诊断, 因此 $ECQ(s, t)$ 满足 $(s+1, s+1)$ -可诊断, 其中 $1 \leq s \leq t$, 定理 8 可证, 证毕。

根据定理 5 和定理 7 可进一步证得 $ECQ(s, t)$ 在 $t_1 > k$ 时的 (t_1, k) -诊断度, 如定理 9 所示。

定理 9 $ECQ(s, t)$ 满足 $(\lfloor 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}} \rfloor, s+1)$ -可诊断, 其中 $\lfloor 2^{(s+t+2+\delta)/4} \rfloor > s+1$, $0 \leq \delta < 1$, $1 \leq s \leq t$ 。

证明 由定理 7 可知, $ECQ(s, t)$ 在 PMC 模型下满足 (t_1, k) -可诊断时, 如果 $t_1 \leq \lfloor 2^{\frac{s+t+2}{4}} \rfloor$, 其中 $0 \leq \delta < 1$, 那么至少存在着一个集团 X_i , $|X_i| \geq t_1+1$ 且 $|N(X_i)| \geq 0$ 。又由定理 5 可知, 给定症候下 $ECQ(s, t)$ 的任意集团 $X_i \in V^+$, 都有 $|V_{N(X_i)}| \geq s+1$, 其中 $1 \leq s \leq t$ 。因此, 根据 (t_1, k) -可诊断的定义可知 $ECQ(s, t)$ 是 $(\lfloor 2^{\frac{s+t+2}{4}} \rfloor, s+1)$ -可诊断系统, 其中

$\lfloor 2^{\frac{s+t+2}{4}} \rfloor > s+1$ 、 $0 \leq \delta < 1$, $1 \leq s \leq t$ 。证毕。

4.4 仿真实验

接下来, 对 $ECQ(s, t)$ ($1 \leq s \leq t \leq 5$) 的 (t_1, k) -诊断度进行仿真实验验证。仿真算法分为节点编码处理、节点状态编码处理和 (t_1, k) -诊断度计算 3 个模块。通过节点编码处理模块和节点状态编码处理模块分别赋给每一个节点一个地址值和一个状态值, 其中, 地址值用一个长度与维数相等的二进制数表示, 状态值用一位二进制表示, 如图 9 所示。

以 $ECQ(2, 2)$ 为例, 其拓扑结构如图 3 所示, 共有节点数 32 个, 所有节点的地址值用一个长度为 5 的二进制表示, 通过节点编码处理模块生成的节点地址值如表 2 所示。

节点有正常和故障 2 种状态, 用“0”表示“正常”状态, 用“1”表示故障状态。以 $ECQ(2, 2)$ 为例, 通过节点状态编码处理模块之后, 32 个节点的状态值总共有 2^{32} 种情况, 如表 3 所示。仿真实验并不需要考虑 2^{32} 种的所有的情况, 只需要根据 t 的取值, 考虑故障节点数少于等于 t 个的情况, 因此共有 C_{32}^t 种情况。

(t_1, k) -诊断度计算处理模块按照引理 6 的充要条件进行设计, 包含 3 个步骤, 具体如下。

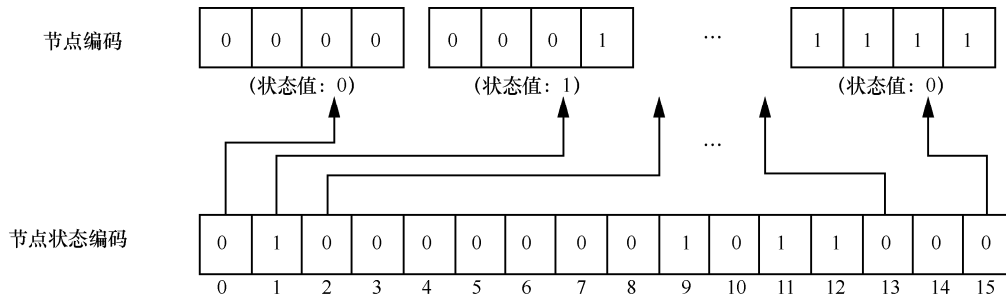


图 9 仿真实验的节点编码和节点状态编码

表 2 ECQ(2, 2)中 32 个节点的地址值

节点编号	节点地址值	节点编号	节点地址值	节点编号	节点地址值	节点编号	节点地址值
0	00000	8	01000	16	10000	24	11000
1	00001	9	01001	17	10001	25	11001
2	00010	10	01010	18	10010	26	11010
3	00011	11	01011	19	10011	27	11011
4	00100	12	01100	20	10100	28	11100
5	00101	13	01101	21	10101	29	11101
6	00110	14	01110	22	10110	30	11110
7	00111	15	01111	23	10111	31	11111

表 3 ECQ(2, 2)中 32 个节点可取的状态值

序号	节点编号																																
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
2 ³² -1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	
2 ³²	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	

步骤 1 计算出 $ECQ(s, t)$ 中不超过 t_1 个故障节点的所有故障节点集合。

步骤 2 对每一种故障节点集合的每一个症候 σ ，构建出 Ω_{σ, t_1} 。

步骤 3 如果所有故障节点集合的所有症候

都满足 $|\bigcap_{F \in \Omega_{\sigma, t_1}} F| \geq k$ 或者 $|\Omega_{\sigma, t_1}| = 1$ ，那么 $ECQ(s, t)$ 满足 (t_1, k) -可诊断，否则 $t_1 = t_1 - 1$ ，跳转到步骤 1。

以 $ECQ(2, 2)$ 为例，步骤 1 中不超过 t ($t \geq 1$) 个故障节点的所有故障节点集合共有 C_{32}^t (即 35 960) 种。

设定 $t=4$ 之后，故障节点集合共有 C_{32}^4 种情况，如表 4 所示。

进而以第 5 178 种情况的故障节点集合为例构建起症候，如图 10 所示。

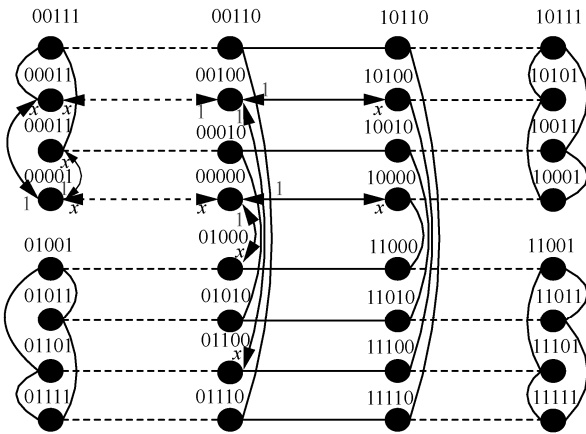


图 10 ECQ(2,2) 特定症候

与图 10 症候相一致的故障节点集合，只有表 5 所示的唯一一种情况。因此， $\Omega_{\sigma,t} = \{00000, 00001, 00010\}$ 。

节点编码处理模块和节点状态编码处理模块的处理流程相对简单，计算规模较小。仿真实验的主要处理过程集中在 (t_1, k) -诊断度计算处理模块，通

过步骤 1 可以取得 $C_{2^{s+t+1}}^1 + C_{2^{s+t+1}}^2 + \dots + C_{2^{s+t+1}}^t$ 种故障节点集合，在最坏情况下步骤 2 中的每一种故障节点集合最多需要对应 $2t_1$ 个症候，最后通过步骤 3 进行循环判断。仿真实验的时间复杂度为 $O(2^{t_1})$ ，时间复杂度较高。仿真实验环境为 2 颗至强 E5-4620 v2 CPU，2 块 16 GB 1 600 MHz 内存，2 块 1.2 TB 10K RPM SAS 6 Gbit/s 硬盘，Microsoft SQL Server 2008 数据库。通过计算得出的仿真实验数据如表 6 所示。实验结果进一步印证了定理 7 和定理 8 的结论。

实际应用中可以引入环诊断算法^[22]进行 (t_1, k) -故障诊断。根据环诊断算法，对初始症候进行局部识别，借助 $0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots \rightarrow 0 \rightarrow 1$ 的局部症候来识别故障节点，进而在替换掉已识别故障节点的基础上进行第二次迭代故障诊断，直到所有的故障节点都被识别为止。

5 结束语

本文以 $ECQ(s, t)$ 为研究对象，首先对 $ECQ(s, t)$ 的拓扑结构展开研究，证得了 $ECQ(s, t)$ 在邻节点方面的相关拓扑性质。在此基础上引入集团的思想，借助 3 个重要函数证明了 $ECQ(s, t)$ 在 PMC 模型下

是 $(s+1, s+1)$ -可诊断和 $\left(\left\lfloor 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}} \right\rfloor, s+1 \right)$ -可诊断，

表 4 故障节点数不超过 4 时 ECQ(2, 2) 的 35 960 种故障节点集合

序号	节点编号																															
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
5 178	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮		
35 959	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	
35 960	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	

表 5 与图 10 症候相一致故障节点集合

序号	节点编号																														
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1

表 6 仿真实验数据与理论推导结果

ECQ(s, t)		(t_1, k) -可诊断 (仿真结果)		$\left\lfloor 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}} \right\rfloor, s+1$ -可诊断 (理论结果)		
s	t	t_1	k	$\left\lfloor 2^{\frac{s+t+2}{4}} \right\rfloor$	$\left\lfloor 2^{\frac{s+t+2+1}{4}} \right\rfloor$	$s+1$
1	1	2	2	2	2	2
1	2	2	2	2	2	2
1	3	3	2	2	3	2
1	4	3	2	3	4	2
1	5	4	2	4	4	2
2	2	3	3	2	3	3
2	3	3	3	3	4	3
2	4	4	3	4	4	3
2	5	5	3	4	5	3
3	3	4	4	4	4	4
3	4	5	4	4	5	4
3	5	6	4	5	6	4
4	4	6	5	5	6	5
4	5	7	5	6	8	5
5	5	9	6	8	9	6

其中 $\left\lfloor 2^{\frac{s+t+2+\delta}{4}} \right\rfloor > s+1, 0 \leq \delta < 1, 1 \leq s \leq t$ 。最后

通过仿真实验验证了结论的正确性。本文的研究成果将有利于进一步理清交换交叉立方网络的可靠性，为交换交叉立方网络的应用和推广奠定了坚实的理论基础。

参考文献:

[1] LAI P L, TAN J M, CHANG C P, et al. Conditional diagnosability measures for large multiprocessor systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 2005, 54(2):165-175.

[2] PREPARATA F P, METZE G, CHIEN R T. On the connection assignment problem of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions Electronic Computers, 1967, 16(12): 848-854.

[3] ARAKI T, SHIBATA Y. (t, k) -diagnosable system: a generalization of the PMC models[J]. IEEE Transactions on Computers, 2003, 52(7):971-975.

[4] CHANG G Y. Conditional (t, k) -diagnosis under the PMC model[J]. IEEE Transactions Parallel and Distributed Systems, 2011, 22(11):1797-1803.

[5] CHANG G Y, CHEN G H, CHANG G J. (t, k) -diagnosis for matching composition networks[J]. IEEE Transactions Computers, 2006, 55(1):88-92.

[6] CHEN C A, HSIEH S Y. (t, k) -diagnosis for component-composition graphs under the MM* model[J]. IEEE Transactions Computers, 2011, 60(12):1704-1717.

[7] CHEN C A, CHANG G Y, HSIEH S Y. Conditional (t, k) -diagnosis in

graphs by using the comparison diagnosis model[J]. IEEE Transactions Computers, 2015, 64(6):1622-1632.

[8] WEI C C, CHEN C A, HSIEH S Y. Conditional (t, k) -diagnosis in regular and irregular graphs under the comparison diagnosis model[J]. IEEE Transactions Dependable and Secure Computing, 2016, PP(99):1-7.

[9] CHEN C A, HSIEH S Y. Component-composition graphs: (t, k) -diagnosability and its application[J]. IEEE Transactions on Computers, 2013, 62(6), 1097-1110.

[10] 熊茜, 梁家荣, 马强. 交换超立方网络的 (t, k) 故障诊断度研究[J]. 通信学报, 2016, 37(3):190-198.

XIONG X, LIANG J R, MA Q. Research on (t, k) -diagnosability for exchanged hypercube network [J]. Journal on Communications, 2016, 37(3):190-198.

[11] 梁家荣, 陈秒江. 基于比较模型的扩展立方体网络的 (t, k) -诊断度研究[J]. 通信学报, 2017, 38(8):9-18.

LIANG J R, CHEN M J. Research on (t, k) -diagnosability for augmented cube network under the comparison model [J]. Journal on Communications, 2017, 38(8):9-18.

[12] FENG N T. A survey of interconnection networks[J]. Computer, 1981, 14(12):12-27.

[13] LI K, MU Y, K LI. Exchanged crossed cube: a novel interconnection network for parallel computation[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2013, 24(11): 2211-2219.

[14] PETER K K, HSU W J, PAN Y. The exchanged hypercube[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 2005, 6(9):866-874.

[15] EFE K. The crossed cube architecture for parallel computation[J]. IEEE Transactions on Parallel and Distributed Systems, 1992, 3(5):513-646.

[16] PENG S L, LIN C K, TAN J J M, et al. The g-good-neighbor condi-

tional diagnosability of hypercube under PMC model[J]. Applied Mathematics and Computation, 2012, 218(21): 10406-10412.

- [17] NING W, FENG X, WANG L. The connectivity of exchanged crossed cube[J]. Information Processing Letters, 2015, 115(2):394-396.
- [18] 郭晨, 冷明, 彭硕, 等. 交换交叉立方网络在 MM 模型下的条件诊断度研究[J]. 通信学报, 2017, 38(9):106-124.
GUO C, LENG M, PENG S, et al. Conditional diagnosability of exchanged crossed cube under the MM model[J]. Journal on Communications, 2017, 38(9):106-124.
- [19] HAKIMI S L, AMIN A T. Characterization of connection assignment of diagnosable systems[J]. IEEE Transactions on Computers, 1974, 23(1):86-88.
- [20] 张大方,江招生. 基于集团的系统级故障诊断研究[J]. 计算机学报, 1998, 21(4):308-314.
ZHANG D F, JIANG Z S. The research of the system-level fault diagnosis based on the body[J]. Chinese Journal of Computers,1998, 21(4):308-314.
- [21] 郭晨, 梁家荣, 葛志辉, 等. 基于互测 PMC 模型的条件诊断算法[J]. 电子学报, 2015, 43(2):255- 261.
GUO C, LIANG J R, GE Z H, et al. A conditional diagnosis algorithm based on ex-test PMC model[J]. ACTA Electronica Sinica, 2015, 43(2):255- 261.
- [22] YE L C, LIANG J R. Five-round adaptive diagnosis in hamiltonian networks[J]. IEEE Transactions Parallel & Distributed Systems, 2015, 26(9):2459-2464.

[作者简介]



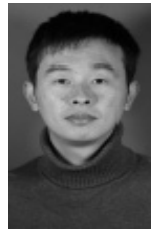
郭晨 (1979-), 男, 江西泰和人, 博士, 井冈山大学副教授, 主要研究方向为网络分析与控制、新型互连网络和系统级故障诊断等。



肖志芳 (1985-), 女, 江西吉安人, 井冈山大学硕士生, 主要研究方向为网络分析与控制、云计算和大数据等。



冷明 (1975-), 男, 江西高安人, 博士, 井冈山大学教授, 主要研究方向为网络分析与控制、云计算和大数据等。



彭硕 (1982-), 男, 江西吉安人, 井冈山大学副教授, 主要研究方向为智能算法、数据挖掘和数据分析等。



王博 (1980-), 男, 江西吉安人, 井冈山大学副教授, 主要研究方向为神经网络和进化算法。